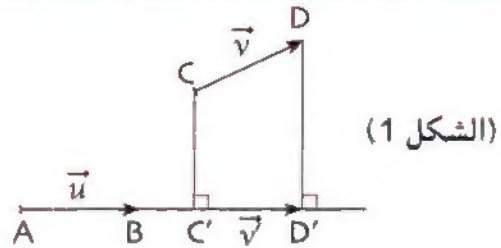
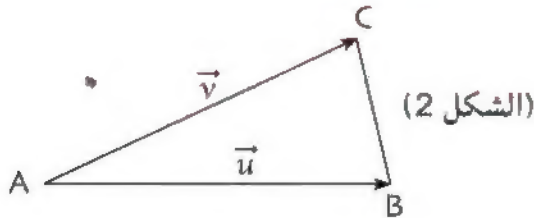


1 - الجداء السلمي في المستوي (مراجعة)

تعريف

\vec{u} ، \vec{v} شعاعان غير منعدمين من المستوي، O ، A ، B ، C نقط مختلفة من نفس المستوي
الجدول التالي يلخص تعريف الجداء السلمي للشعاعين \vec{u} و \vec{v} (أو للشعاعين \vec{OA} و \vec{OB}).

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$ حيث \vec{v}' المسقط للشعاع \vec{v} على حامل \vec{u} . $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{C'D'}$ حيث C' ، D' المسقطان العموديان للنقطتين C ، D على المستقيم (AB) . (الشكل 1)	$\vec{v} \cdot \vec{u} = \ \vec{u}\ \cdot \ \vec{v}\ \cos(\vec{u}; \vec{v})$ (الشكل 1)
في معلم متعامد و متجانس $(\vec{i}; \vec{j})$ حيث $B(x'; y') : A(x; y)$ يكون $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = xx' + yy'$	في أساس متعامد و متجانس $(\vec{i}; \vec{j})$ حيث $\vec{u}(x; y)$ و $\vec{v}(x'; y')$ يكون $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} [AB^2 + AC^2 - BC^2]$ (الشكل 2)	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 - \ \vec{v} - \vec{u}\ ^2]$ (الشكل 2)



ملاحظة : إذا كان أحد الشعاعين متعامداً فإن الجداء السلمي لهما منعدم.

نقبل أن الشعاع \vec{O} عمودي على أي شعاع من المستوي.

حالة خاصة : \vec{u} و \vec{v} متعامدان إذا وفقط إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

المسافة بين نقطة و مستقيم في المستوي

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

المسافة بين النقطة $A(x_0; y_0)$ و المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $ax + by + c = 0$

حيث $(a; b) \neq (0; 0)$ هي $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

خاصية

$A \neq B$ نقط من المستوي حيث

$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ إذا وفقط إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[AB]$.

II - الجداء السلمي في الفضاء

تعريف

\vec{u} ، \vec{v} شعاعان من الفضاء. A, B, C نقط حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ، $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
الجداء السلمي للشعاعين \vec{u} ، \vec{v} هو الجداء السلمي للشعاعين \overrightarrow{AB} ، \overrightarrow{AC} في مستوي يشمل
النقط A, B, C .

ملاحظة : كل خواص الجداء السلمي، المدروسة في الهندسة المستوية، تطبق على النقط و على
الأشعة، من نفس المستوي، في الفضاء.

خواص

\vec{u} ، \vec{v} ، \vec{w} أشعة من الفضاء.

$$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2. \quad k \in \mathbb{R} \text{ حيث } (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}. \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{نتيجة :}$$

العبارة التحليلية

$\vec{u}(x; y; z)$ و $\vec{v}(x'; y'; z')$ شعاعان في الأساس المتعامد والمتجانس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

تعامد شعاعين

الشعاعان \vec{u} ، \vec{v} متعامدان إذا وفقط إذا كان $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$.

$\vec{u} \cdot (x; y; z)$ و $\vec{v} \cdot (x'; y'; z')$ شعاعان في الأساس المتعامد والمتجانس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

\vec{u} ، \vec{v} متعامدان إذا وفقط إذا كان $xx' + yy' + zz' = 0$.

ملاحظة : نقبل أن الشعاع $\vec{0}$ عمودي على أي شعاع من الفضاء.

معيار شعاع : $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ أساس متعامد ومتجانس. $\vec{u}(x; y; z)$ شعاع. $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

المسافة بين نقطتين

المسافة بين النقطتين A, B يرمز لها AB هي $\|\overrightarrow{AB}\|$. نكتب $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.

$A(x; y; z)$ ، $B(x'; y'; z')$ نقطتان من الفضاء و المنسوب إلى معلم متعامد

و متجانس $(\vec{0}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. لدينا $AB = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$.

III - المستقيمات في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. تمثيل وسيطي لمستقيم

لتكن النقطة $A(x_0; y_0; z_0)$ والشعاع $\vec{u}(a; b; c)$ غير المنعدم.

المستقيم (D) الذي يشمل A و يقبل \vec{u} شعاع توجيه له هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ حيث $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$ مع λ عدد حقيقي.

هذه الجملة تسمى تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$
 $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$ يكافئ

2. معادلات ديكارتية لمستقيم

المستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(x_0; y_0; z_0)$ ويقبل $\vec{u}(a; b; c)$ شعاع توجيه له يعرف مثلاً

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \\ \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \end{cases}$$

بعبارة عادة عن هذه الجملة كما يلي : $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ حيث a, b, c غير منعدمة.

حالات خاصة

• إذا كان $c = 0$ فإن (D) يعرف بالجملة
$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \\ z = z_0 \end{cases}$$

• إذا كان $b = 0$ فإن (D) يعرف بالجملة
$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c} \\ y = y_0 \end{cases}$$

• إذا كان $a = 0$ فإن (D) يعرف بالجملة
$$\begin{cases} \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \\ x = x_0 \end{cases}$$

IV - المستويات في الفضاء

1. تمثيل وسيطي لمستو

الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. لتكن النقطة $A(x_0; y_0; z_0)$ والشعاعان غير المتوازيين

$\vec{u}(a; b; c)$ ، $\vec{v}(a'; b'; c')$. المستوي (P) الذي يشمل النقطة A و يقبل \vec{u} و \vec{v} شعاعي

توجيه له هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ حيث $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ مع λ و μ عدداً حقيقيين.

هذه الجملة تسمى تمثيلا وسيطيا للمستوي (P).
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases}$$
 $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ يكافئ

2. معادلة ديكارتية لمستو

الشعاع الناطمي لمستو

تعريف

(P) مستو في الفضاء.

نسمي شعاعا ناطميا للمستوي (P)، كل شعاع توجيهه لمستقيم عمودي على (P).

خاصية مميزة: \vec{n} شعاع غير منعدم، A نقطة من الفضاء.

مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ ، هي المستوي (P) الذي يشمل النقطة A و يقبل \vec{n} شعاعا ناطميا له.

معادلة ديكارتية لمستو

ينسب الفضاء إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

لكل مستو (P) شعاعه الناطمي $\vec{n}(a; b; c)$ معادلة ديكارتية من الشكل

$ax + by + cz + d = 0$ حيث $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ و d عدد حقيقي.

* مجموعة النقط $M(x; y; z)$ حيث $ax + by + cz + d = 0$ مع $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$

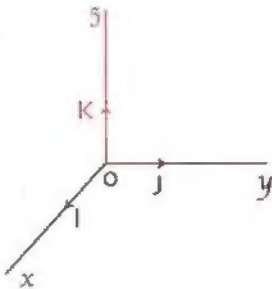
و $d \in \mathbb{R}$ هي مستو حيث $\vec{n}(a; b; c)$ شعاع ناطمي له.

حالات خاصة: نضع $\vec{i} = \vec{OI}$ ، $\vec{j} = \vec{OJ}$ و $\vec{k} = \vec{OK}$.

$z = 0$ هي معادلة للمستوي $(O; I, J)$ و \vec{k} شعاع ناطمي له.

$y = 0$ هي معادلة للمستوي $(O; I, K)$ و \vec{j} شعاع ناطمي له.

$x = 0$ هي معادلة للمستوي $(O; J, K)$ و \vec{i} شعاع ناطمي له.



V - توازي مستويين

$ax + by + cz + d = 0$ معادلة للمستوي (P) و $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ معادلة للمستوي (P').

(P) و (P') متوازيان إذا وفقط إذا كان $a' = \lambda a$ و $b' = \lambda b$ و $c' = \lambda c$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

• إذا كان $abc \neq 0$ فإن (P) يوازي (P') يكافئ $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$.

• إذا كان $a' = \lambda a$ و $b' = \lambda b$ و $c' = \lambda c$ و $d' = \lambda d$ فإن (P) و (P') متطابقان.

VI - تعامد مستويين

$ax + by + cz + d = 0$ معادلة للمستوي (P) و $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ معادلة للمستوي (P').

(P) و (P') متعامدان يكافئ $aa' + bb' + cc' = 0$.

VII - المسافة بين نقطة ومستوى

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

(P) مستوى من الفضاء و $ax + by + cz + d = 0$ معادلة له حيث $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ و

$M(x_0; y_0; z_0)$ نقطة من الفضاء.

المسافة بين النقطة A والمستوي (P) هي $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

VIII - التمييز المرجحي

A, B, C نقط من الفضاء ليست على استقامة واحدة.

1. المستقيم (AB) هو مجموعة مراجع النقطتين A, B .

حالة خاصة : القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة مراجع النقطتين A, B مرفقتين بمعاملين لهما نفس الإشارة.

2. المستوي (ABC) هو مجموعة مراجع النقط A, B, C .

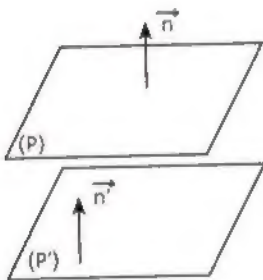
IX - الأوضاع النسبية

1. الأوضاع النسبية لمستويين

(P) و (P') مستويان، \vec{n} و $\vec{n'}$ شعاعان ناظميان لهما بهذا الترتيب.

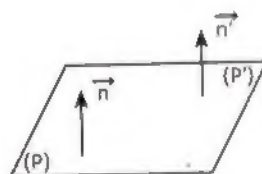
• إذا كان \vec{n} و $\vec{n'}$ مرتبطين خطيا (متوازيين) فإن (P) و (P') متوازيان.

• إذا كان \vec{n} و $\vec{n'}$ مستقلين خطيا (غير متوازيين) فإن (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم.



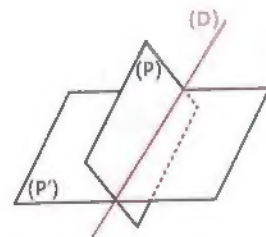
(P) و (P') متوازيان تماما

$$(P) \cap (P') = \emptyset$$



(P) و (P') منطبقان

$$(P) \cap (P') = (P) = (P')$$



(P) و (P') متقاطعان

$$(P) \cap (P') = (D)$$

2. الأوضاع النسبية لثلاث مستويات

(P_1) ، (P_2) و (P_3) مستويات.

1. إذا كان (P_1) و (P_2) متوازيين تماما فإن تقاطع (P_1) ، (P_2) و (P_3) مجموعة خالية.

2. إذا كان (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (D) فتوجد ثلاثة حالات :

• إذا كان $(P_3) \subset (D)$ فإن $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = (D)$.

• إذا كان $(P_3) \cap (D) = \{I\}$ فإن $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \{I\}$.

• إذا كان $(P_3) \cap (D) = \emptyset$ فإن $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \emptyset$.

3. الأوضاع النسبية لمستقيم ومستو

(D) مستقيم، \vec{u} شعاع توجيه له. (P) مستوي و \vec{n} شعاع ناظمي له.

• إذا كان \vec{u} و \vec{n} متعامدين فإن (D) يوازي (P) .

• إذا كان \vec{u} و \vec{n} غير متعامدين فإن (D) يقطع (P) .

4. الأوضاع النسبية لمستقيمين

(D) ، (D') مستقيمان في الفضاء.

• إذا كان (D) و (D') من نفس المستوي فإن دراسة أوضاعهما النسبية في الفضاء تعود إلى دراسة

أوضاعهما النسبية في هذا المستوي.

• إذا لم يوجد مستو يحتوي على (D) و (D') فإنهما غير متوازيين و غير متقاطعين.

1 حساب الجداء السلمي لشعاعين في المستوى

تمرين

ABC مثلث قائم في C و متساوي الساقين حيث $BC = a$.
احسب الجداء السلمي $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

حل

ABC مثلث قائم في C. إذن $AB^2 = AC^2 + BC^2$ أي $AB = a\sqrt{2}$.

طريقة 1: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cos \frac{\pi}{4} = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$ إذن $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = a^2$.

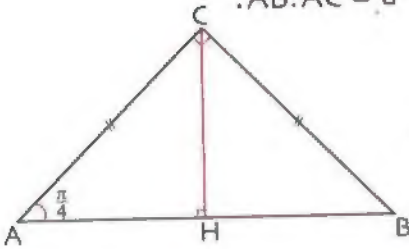
طريقة 2: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = AB \cdot AH$.

(\vec{AH} و \vec{AB} لهما نفس الإشارة و H المسقط العمودي للنقطة C

على (AB) و H منتصف [AB]).

إذن $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \left(a\sqrt{2}\right) \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = a^2$ و بالتالي $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = a^2$.

طريقة 3: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = a^2$ إذن $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} [AB^2 + AC^2 - BC^2] = \frac{1}{2} [2a^2 + a^2 - a^2] = a^2$.



2 حساب المسافة بين نقطة ومستقيم من المستوى

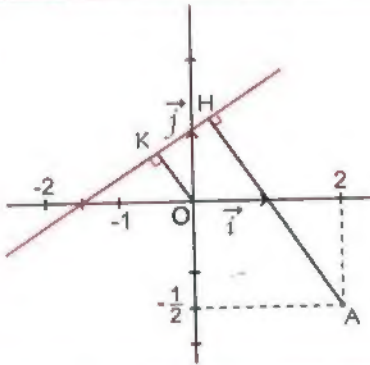
تمرين

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

احسب المسافة بين المبدأ O والمستقيم (D).

الذي معادلته $2x - 3y + 3 = 0$.

احسب المسافة بين النقطة $A\left(2; -\frac{3}{2}\right)$ والمستقيم (D).



حل

إذا كان K المسقط العمودي للنقطة O على (D) فإن المسافة بين O و (D) هي OK.

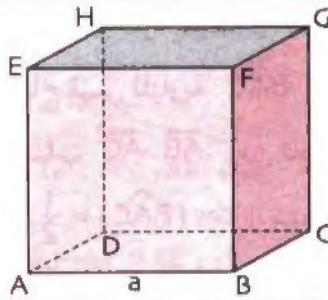
$$\text{لدينا } OK = \frac{|2(0) - 3(0) + 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

إذا كان H المسقط العمودي للنقطة A على (D) فإن $AH = \frac{|2(2) - 3(-\frac{3}{2}) + 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$

$$\text{إذن } AH = \frac{11,5\sqrt{13}}{13}$$

3 حساب الجداء السلمي لشعاعين في الفضاء

تمرين 1



نفرض المكعب ABCDEFGH المقابل حيث $AB = a$.

احسب الجداءات السلمية التالية :

$$\vec{FG} \cdot \vec{BH}, \vec{FC} \cdot \vec{AD}, \vec{CA} \cdot \vec{CB}, \vec{BC} \cdot \vec{DH}, \vec{AB} \cdot \vec{DH}$$

حل

((DH)) عمودي على كل من ((DA)) و ((DC))

فهو عمودي على المستوي ((ADC)) و بالتالي

((AB)) \perp ((DH)) و بالمثل ((BC)) \perp ((DH))

$$(\vec{AD} = \vec{BC})$$

$$(\vec{FC}^2 = \vec{FB}^2 + \vec{BC}^2)$$

$$(\vec{FG} = \vec{BC})$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{DH} = 0 \text{ إذن } (AB) \perp (DH).$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{DH} = 0 \text{ إذن } (BC) \perp (DH).$$

$$\begin{aligned} \vec{CA} \cdot \vec{CB} &= CA \cdot CB \cos(\widehat{ACB}). \\ &= a^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{FC} \cdot \vec{AD} &= \vec{FC} \cdot \vec{BC} = FC \cdot BC \cos \frac{\pi}{4}. \\ &= (a\sqrt{2}) a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{FG} \cdot \vec{BH} &= \vec{BC} \cdot \vec{BH} = \vec{BC} \cdot (\vec{BC} + \vec{CH}) \\ &= \vec{BC}^2 + \vec{BC} \cdot \vec{CH} \\ &= \vec{BC}^2 = a^2 \end{aligned}$$

((BC)) عمودي على ((CD)) و ((CG)) فهو عمودي على المستوي ((DCG)) و بالتالي عمودي على ((CH)).

تمرين 2

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقط $B(-\sqrt{2}-1; 0, -2)$: $A(-1; -1, -3)$

$D(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1; -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$: $C(-\sqrt{2}-1; -2, -2)$

احسب المسافتين AC, AB .

احسب الجداء السلمي للشعاعين \vec{AC}, \vec{AB} و للشعاعين \vec{CD}, \vec{AB} .

استنتج قيسا للزاوية \widehat{BAC} ثم طبيعة المثلث ABC .

حل

$$\vec{CD} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right) : \vec{AC} (-\sqrt{2}; -1; 1) : \vec{AB} (-\sqrt{2}; 1; 1) \text{ لدينا}$$

$$AC = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-1)^2 + 1} = 2 \text{ و } AB = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + 1 + 1} = 2.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-\sqrt{2})(-\sqrt{2}) + (1)(-1) + (1)(1) = 2.$$

و النتيجة الأخيرة تثبت أن (AB) و (CD) متعامدان.

استنتاج قيس للزاوية \widehat{BAC} : لدينا من جهة $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$

و بحساب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos(\widehat{BAC})$ (من تعريف الجداء السلمي) نجد :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2} \quad \text{إذن} \quad \cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2} \quad \text{ينتج أن} \quad \frac{\pi}{3} \quad \text{قيس للزاوية} \quad \widehat{BAC}.$$

و بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع ($\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ و $AB = AC$).

4 تعيين تمثيل وسيطي لمستقيم وتوظيفه

تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطتين

$$A(1; -2; -3) \quad \text{و} \quad B(-2; 2; 0).$$

هل تنتمي النقطة $C(1; -3; -2)$ إلى المستقيم (D)؟ هل تنتمي النقطة $E(-2; -2; 0)$ إلى (D)؟

حل

$t \in \mathbb{R}$ حيث $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 4t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$ إذن $\overrightarrow{AB}(-3; 4; 3)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D) و هو تمثيل وسيطي للمستقيم (D).

$$\begin{cases} 1 - 3t = 1 \\ -2 + 4t = -3 \\ -3 + 3t = -2 \end{cases} \quad C \in (D) \quad \text{إذا فقط إذا وجد عدد حقيقي } t \text{ يحقق}$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{1}{4} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{1}{4} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{نلاحظ أنه لا توجد قيمة للعدد } t \text{ تحقق هذه الجملة. إذن } C \notin (D).$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} -2 = 1 - 3t \\ 2 = -2 + 4t \\ 0 = -3 + 3t \end{cases} \quad E \in (D) \quad \text{إذا فقط إذا وجد عدد حقيقي } t \text{ يحقق الجملة. إذن } t = 1 \quad \text{و بالتالي} \quad E \in (D).$$

5 تعيين معادلات ديكارتية لمستقيم في الفضاء

تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

حدد المجموعة E من النقط $M(x; y; z)$ المعرفة بالتمثيل الوسيطي (S) التالي :

$$(S) \quad \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = -1 - k \\ z = 1 - 3k \end{cases} \quad \text{حيث } k \in \mathbb{R} \quad \dots\dots\dots (S)$$

أكتب معادلات ديكارتية لها.

حل

• لتكن النقطة $A(-3; -1; 1)$ من E المحصل عليها من أجل $k = 0$ ، النقطة $M(x; y; z)$ من E من أجل عدد حقيقي k كيفي.

الجملة (S) تكافئ (S') ... $\begin{cases} x+3=2k \\ y+1=-k \\ z-1=-3k \end{cases}$ أو المعادلة $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ حيث $\vec{u}(2; -1; -3)$.

إذن المجموعة E هي المستقيم الذي يشمل $A(-3; -1; 1)$ و يقبل $\vec{u}(2; -1; -3)$ شعاع توجيه له.

• كتابة معادلات ديكارتية للمستقيم E . الجملة (S') تكافئ $\frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$ وهي معادلات للمستقيم E الذي يشمل A و يقبل \vec{u} شعاع توجيه له.

6 تعيين تمثيل وسيطي لمستوى الفضاء

تمرين 1

• الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستوى (P) الذي يشمل النقطة $A(-1; -2; 1)$ و يقبل $\vec{u}(-2; \frac{1}{2}; 3)$ و $\vec{v}(1; -2; \frac{1}{2})$ شعاعين توجيهيين له.

حل

المستوى (P) هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ حيث $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ ؛ λ و μ عدنان حقيقيان. لدينا $A(-1; -2; 1)$ ؛ $\vec{u}(-2; \frac{1}{2}; 3)$ ؛ $\vec{v}(1; -2; \frac{1}{2})$.

إذن الجملة $\begin{cases} x = -1 - 2\lambda + \mu \\ y = -2 + \frac{1}{2}\lambda - 2\mu \\ z = 1 + 3\lambda + \frac{1}{2}\mu \end{cases}$ هي تمثيل وسيطي للمستوى (P) .

تمرين 2

• الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

• عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستوى (P) الذي يشمل النقط $A(2; 0; 1)$ ، $B(2; 1; -1)$ و $C(1; 3; 0)$. هل تنتمي النقطة O مبدأ المعلم إلى (P) ؟ هل تنتمي النقطة $D(1; 2; 2)$ إلى (P) ؟

حل

$\overrightarrow{AB}(0; 1; -2)$ و $\overrightarrow{AC}(-1; 3; -1)$ شعاعان. لا يوجد عدد حقيقي k يحقق $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$. إذن \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير متوازيين و هما شعاعان توجيهيان للمستوى (P) .

ينتج أن $\begin{cases} x = 2 + 0.\lambda - \mu \\ y = 0 + \lambda + 3\mu \\ z = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases}$ الجملة $\begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases}$ هي تمثيل وسيطي للمستوى (P) .

الذي يشمل النقط A, B, C .

$$\begin{cases} 0 = 2 - \mu \\ 0 = \lambda + 3\mu \\ 0 = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases} \quad \text{تقبل حلا وحيدا، وحل الجملة} \quad \begin{cases} 0 = 2 - \mu \\ 0 = \lambda + 3\mu \\ 0 = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases} \quad \dots (S) \text{ يعني أن الجملة } O \in (P).$$

هو $(\lambda; \mu) = (-6; 2)$. هذا الحل لا يحقق المعادلة $1 - 2\lambda - \mu = 0$ (لأن $1 - 2(-6) - 2 \neq 0$).

إذن الجملة (S) لا تقبل حلا وبالتالي النقطة O لا تنتمي إلى (P).

$$\begin{cases} 1 = 2 - \mu \\ 2 = \lambda + 3\mu \\ 2 = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases} \quad \text{تقبل حلا وحيدا، وحل الجملة} \quad \begin{cases} 1 = 2 - \mu \\ 2 = \lambda + 3\mu \\ 2 = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases} \quad \dots (D) \text{ يعني أن الجملة } D \in (P).$$

هو $(\lambda; \mu) = (-1; 1)$ وهذا الحل يحقق المعادلة $2 = 1 - 2\lambda - \mu$ أي $2 = 1 - 2(-1) - 1 = 2$.

إذن النقطة D تنتمي إلى (P).

7 تعيين تمثيل وسيطي لمستوحي الفضاء

تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقاط $A(-2; 1; -1)$ ، $B(1; 0; -1)$ ، $C(-2; 4; 1)$.

1. عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A، ويقبل \vec{BC} شعاعا ناظميا.

2. أثبت أن النقاط A، B، C تعيّن مستويا. عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

حل

1. $\vec{BC}(-3; 4; 2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) يعني $-3x + 4y + 2z + d = 0$ حيث $d \in \mathbb{R}$.

(P) يشمل النقطة A يعني $-3(-2) + 4(1) + 2(-1) + d = 0$ أي $d = -8$.

إذن $-3x + 4y + 2z - 8 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P).

2. النقاط A، B، C تعيّن مستويا إذا فقط إذا كان \vec{BA} و \vec{BC} غير متوازيين.

لدينا $\vec{BA}(-3; 1; 0)$ و $\vec{BC}(-3; 4; 2)$. لا يوجد عدد حقيقي α من أجله يكون $\vec{BC} = \alpha \vec{BA}$.

وبالتالي الشعاعان \vec{BA} و \vec{BC} غير متوازيين. إذن النقاط A، B، C تعيّن مستويا.

تعيّن معادلة ديكارتية للمستوي (ABC). إذا كان $\vec{n}(a; b; c)$ شعاعا ناظميا للمستوي

(ABC) فإن \vec{n} عمودي على كل مستقيم من المستوي (ABC). وبالتالي على (AB) و (BC)، إذن

\vec{n} عمودي على كل من الشعاعين \vec{BA} و \vec{BC} .

$$\begin{cases} b = 3a \\ c = -\frac{9}{2}a \\ a \neq 0 \end{cases} \quad \text{ينتج أن} \quad \begin{cases} -3a + b + 0c = 0 \\ -3a + 3b + 2c = 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BC} = 0 \end{cases}$$

كل شعاع إحداثياته $(a; 3a; -\frac{9}{2}a)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

و باختيار قيمة للعدد a مثل $a = 2$ يكون $\vec{n} (2 ; 6 ; -9)$ شعاعان ناظميا للمستوي (ABC).
و تكون معادلة المستوي (ABC) هي $2x + 6y - 9z + e = 0$ حيث $e \in \mathbb{R}$.
بما أن B نقطة من هذا المستوي فإن $2(1) + 6(0) - 9(+1) + e = 0$
و بالتالي $e = -11$. ينتج أن $2x + 6y - 9z - 11 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

8 دراسة تقاطع مستقيمين في الفضاء

تمارين

الفضاء منسوب إلى معلم $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$(\Delta_1) ; (\Delta_2) ; (\Delta_3)$ مستقيمات، تمثيلاتها الوسيطة على التوالي هي :

$$\begin{cases} x = 7 - 7r \\ y = 3r \\ z = -2r \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = 2 - 5q \\ y = 1 + q \\ z = -3 - 4q \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = -1 + p \\ y = -4 - 3p \\ z = -5 + p \end{cases}$$

حيث r, q, p أعداد حقيقية.

ادرس تقاطع (Δ_1) و (Δ_2) ثم (Δ_2) و (Δ_3) .

حل

1. $\vec{u}_1 (1 ; -3 ; 1)$ شعاع توجيه لـ (Δ_1) و $\vec{u}_2 (-5 ; 1 ; -4)$ شعاع توجيه لـ (Δ_2) .

نلاحظ أن \vec{u}_1 و \vec{u}_2 غير متوازيين (لا يوجد عدد حقيقي α بحيث $\vec{u}_2 = \alpha \vec{u}_1$)

إذن (Δ_1) و (Δ_2) غير متوازيين. فهما متقاطعان أو غير مستويين (لا يوجد مستو يحتوي عليهما).

للتعرف على وضعية المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) نحل الجملة

$$\begin{cases} p = -2 \\ q = 1 \end{cases} \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} p + 5q = 3 \\ 3p + q = -5 \\ p + 4q = 2 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} -1 + p = 2 - 5q \\ -4 - 3p = 1 + q \\ -5 + p = -3 - 4q \end{cases}$$

من أجل $p = -2$ نجد النقطة من (Δ_1) ذات الإحداثيات $(-3 ; 2 ; -7)$

من أجل $q = 1$ نجد النقطة من (Δ_2) ذات الإحداثيات $(-3 ; 2 ; -7)$ و هي نفس النقطة من (Δ_1) .

إذن (Δ_1) و (Δ_2) يشتركان في النقطة ذات الإحداثيات $(-3 ; 2 ; -7)$.

2. $\vec{u}_3 (-7 ; 3 ; -2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ_3) . \vec{u}_2 و \vec{u}_3 غير متوازيين.

إذن (Δ_2) و (Δ_3) غير متوازيين، فهما متقاطعان أو غير مستويين. للتعرف على وضعية المستقيمين

$$\begin{cases} 5q - 7r = 5 \\ q - 3r = -1 \\ 4q - 2r = -3 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} 2 - 5q = 7 - 7r \\ 1 + q = 3r \\ -3 - 4q = -2r \end{cases} \quad ; \quad \text{نحل الجملة التالية :}$$

هذه الجملة لا تقبل حلا (لأن حل الجملة $\begin{cases} 5q - 7r = -5 \\ q - 3r = -1 \end{cases}$ هو $(-1 ; 0)$ و لا يحقق المعادلة $4q - 2r = -3$)

إذن (Δ_2) و (Δ_3) غير متقاطعين و غير متوازيين و بالتالي فهما غير مستويين.

9 دراسة تقاطع مستقيم و مستوي في الفضاء

تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(P) المستوي المعرف بالمعادلة $2x + 3y - z - 1 = 0$

و (D_1) و (D_2) المستقيمان المعرفان على الترتيب بالتمثيلين الوسيطيين $\begin{cases} x = -1 + s \\ y = 1 - s \\ z = 1 - s \end{cases}$ و $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$

حيث s و t عدنان حقيقيان.

ادرس تقاطع كل من المستوي (P) و المستقيمين (D_1) و (D_2) .

حل

$\vec{u}(2; 3; -1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)، $\vec{v}_1(3; -2; 1)$ شعاع توجيه للمستقيم (D_1) ، $\vec{v}_2(1; -1; -1)$

شعاع توجيه للمستقيم (D_2) .

الشعاعان \vec{u} و \vec{v}_1 غير متعامدين (لأن $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 2(3) + 3(-2) + (-1)(1) = -1 \neq 0$)

إذن (P) و (D_1) غير متوازيين. فهما متقاطعان، و تعين نقطة تقاطعهما كالآتي:

لدينا $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + t \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$ ومنه $2(2 + 3t) + 3(1 - 2t) - (3 + t) = 1$ أو $4 - t = 1$ إذن $t = 3$.

إحداثيات نقطة تقاطع (P) و (D_1) من أجل $t = 3$ هي $(11; -5; 6)$.

الشعاعان \vec{u} و \vec{v}_2 متعامدان (لأن $\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 2(1) + 3(-1) + (-1)(-1) = 0$)

إذن (P) و (D_2) متوازيان.

10 تقاطع مستويين

تمرين

(P_1) ، (P_2) و (P_3) مستويات معادلاتها على الترتيب

$3x - 3y + 6z + 1 = 0$ ، $x - y + 2z - 5 = 0$ و $3x - 2y - z + 1 = 0$

ادرس تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) ثم تقاطع المستويين (P_2) و (P_3) .

حل

دراسة تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) : لدينا $\vec{n}_1(3; -2; -1)$ و $\vec{n}_2(1; -1; 2)$ شعاعان ناظميان

للمستويين (P_1) و (P_2) على الترتيب. نلاحظ أن \vec{n}_1 و \vec{n}_2 غير متوازيين.

إذن (P_1) و (P_2) غير متوازيين. فهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

تعين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ)

لتعين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) نعبّر عن x و y مثلاً بدلالة z حيث يكون z هو الوسيط.

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ x = -\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right) = 5 - 2t \\ z = t \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} 3x - 2y = -1 + t \\ x - y = 5 - 2t \\ z = t \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} 3x - 2y - z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 5 = 0 \end{cases} \text{ لدينا}$$

بعد الاختصار نجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) و هو $\begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = -16 + 7t \\ z = t \end{cases}$ حيث $t \in \mathbb{R}$.

• تقاطع (P_2) و (P_3) : لدينا $\vec{n}_2(1; -1; 2)$ و $\vec{n}_3(3; -3; 6)$ شعاعان ناظميان للمستوي (P_2) و (P_3) .
نلاحظ أن $\vec{n}_3 = 3\vec{n}_2$. إذن \vec{n}_3 و \vec{n}_2 متوازيان. نختار نقطة من (P_2) مثل $A(-5; 0; 0)$.
إحداثيات A لا تحقق معادلة (P_3) أي أن $A \notin (P_3)$. إذن (P_2) و (P_3) متوازيان تماما (أي غير منطبقين).

11 دراسة تقاطع ثلاث مستويات

تمرين 1

(P_1) ، (P_2) و (P_3) مستويات ذات المعادلات $x + y + z = 4$ ، $-x + y - z - 2 = 0$ و $3x + 4y + 3z - 15 = 0$ على الترتيب.
ادرس تقاطع هذه المستويات.

حل

لتعيين تقاطع المستويات (P_1) ، (P_2) ، (P_3) نحل الجملة (S)
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -x + y - 2z = 3 \\ 3x + 4y + 3z = 15 \end{cases}$$

الجملة (S) تكافئ $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ y = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ إذن $(x; y; z) = (2; 3; -1)$

الجملة (S) تقبل حلا وحيدا هو $(2; 3; -1)$. نستنتج أن المستويات (P_1) ، (P_2) و (P_3) تشترك في نقطة واحدة هي $A(2; 3; -1)$.

تمرين 2

(P_1) ، (P_2) و (P_3) مستويات ذات المعادلات $x + 2y - z - 3 = 0$ ، $2x - y + 3z - 4 = 0$ و $x - 3y + 4z - 2 = 0$ على الترتيب. • ادرس تقاطع هذه المستويات.

حل

لتعيين تقاطع المستويات (P_1) ، (P_2) و (P_3) نحل الجملة (S)
$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ x - 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

الجملة (S) تكافئ $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 5x + 5y = 13 \\ 5x + 5y = 14 \end{cases}$

هذه الجملة ليس لها حل. إذن تقاطع المستويات الثلاث هو مجموعة خالية.

12 توظيف الجداء السلمي لتعيين مجموعات نقط في الفضاء

تمرين 1

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
A نقطة إحداثياتها $(-1; 3; 2)$ ، \vec{u} شعاع إحداثياته $(-1; 3; 2)$.
عين مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\vec{AM} \cdot \vec{u} = -10$.

حل

نفرض $M(x; y; z)$ لدينا $\vec{AM}(x-2; y-3; z+1)$
وحسب التعريف التحليلي للجداء السلمي لشعاعين يكون
 $\vec{AM} \cdot \vec{u} = (-1)(x-2) + 3(y-3) + 2(z+1)$

$$\vec{AM} \cdot \vec{u} = -10 \text{ يكافئ } -x + 3y + 2z + 5 = 0$$

إذن مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\vec{AM} \cdot \vec{u} = -10$

هو المستوي (P) المعروف بالمعادلة $x - 3y - 2z - 5 = 0$

المستوي (P) يشمل نقطة مثل $B(0; 0; -\frac{5}{2})$ و يقبل $\vec{u}(-1; 3; 2)$ شعاعا ناظميا له.

تمرين 2

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
A(1; -1; 4)، B(-1; 2; -3) نقطتان من الفضاء.

1. عين مجموعة النقط M بحيث يكون $3MA^2 - 2MB^2 = 540$

2. عين مجموعة النقط M بحيث يكون $MA^2 - MB^2 = 10$

حل

M نقطة من الفضاء احداثياتها $(x; y; z)$

$$\vec{MA}(x-1; y+1; z-4) ; \vec{MB}(x+1; y-2; z+3)$$

$$MA^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 8z + 18$$

$$MB^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z + 14$$

$$3MA^2 - 2MB^2 = 540 \text{ يكافئ } x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 14y - 36z + 26 = 540$$

$$\text{أي أن } (x-5)^2 + (y+7)^2 + (z-18)^2 + 424 = 540$$

$$\text{إذن } (x-5)^2 + (y+7)^2 + (z-18)^2 = 4^2$$

إذن مجموعة النقط M من الفضاء حيث $3MA^2 - 2MB^2 = 540$

هي الكرة التي مركزها $\omega(5; -7; 18)$ و نصف قطرها 4.

$$2. MA^2 - MB^2 = 10 \text{ يعني } (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 - (x+1)^2 - (y-2)^2 - (z+3)^2 = 10$$

$$\text{أي أن } -4x + 6y - 14z + 4 = 10 \text{ أو } -2x + 3y - 7z - 3 = 0$$

و هي معادلة لمستوى (P) يشمل نقطة مثل $C(0; 1; 0)$ و يقبل $\vec{u}(-2; 3; -7)$ شعاعا ناظما له.

13 كتابة معادلة ديكارتية لمستوى علم تمثيل وسيطي له

تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$(P) \text{ مستوى معرف بتمثيل وسيطي له و هو } \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \gamma \\ y = -1 + 3\lambda + 2\gamma \\ z = 2 + \lambda + 3\gamma \end{cases} \text{ حيث } \lambda, \gamma \text{ عدنان حقيقيان.}$$

اكتب معادلة ديكارتية للمستوى (P).

حل

$$\begin{cases} 2\lambda + \gamma = x - 1 \\ 3\lambda + 2\gamma = y + 1 \\ \lambda + 3\gamma = z - 2 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \gamma \\ y = -1 + 3\lambda + 2\gamma \\ z = 2 + \lambda + 3\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda + \gamma = x - 1 \\ 3\lambda + 2\gamma = y + 1 \end{cases} \quad \text{نحل الجملة الاخيرة ذات المجهولين } \lambda, \gamma \text{ بإيجاد حل لجملة معادلتين مثل}$$

فيكون $(\lambda; \gamma) = (2x - y - 3; -3x + 2y + 5)$ ، ثم نعوض λ و γ في المعادلة الباقية و هي

$$2x - y - 3 + 3(-3x + 2y + 5) = z - 2 \quad \text{أي} \quad \lambda + 3\gamma = z - 2$$

14 كتابة تمثيل وسيطي لمستوى علمت معادلة ديكارتية له

تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: (P) مستوى معرف بالمعادلة

$$2x + y - z + 3 = 0. \text{ عين تمثيلا وسيطيا للمستوى (P).}$$

حل

يعرف المستوى بثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة. نختار ثلاثة نقط مثل $A(-\frac{3}{2}; 0; 0)$ ،

$B(0; -3; 0)$ ، $C(0; 0; 3)$ تنتمي إلى المستوى (P). إذن (P) يشمل A و يقبل \vec{AB} و \vec{AC}

شعاعي توجيه له. لدينا $\vec{AB}(\frac{3}{2}; -3; 0)$ ، $\vec{AC}(\frac{3}{2}; 0; 3)$ إذن يوجد عدنان حقيقيان λ, γ

$$\text{بحيث } \begin{cases} x = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{2}\gamma \\ y = -3\lambda \\ z = 3\gamma \end{cases} \text{ و هذه الجملة هي تمثيل وسيطي للمستوى (P).}$$

15 كتابة جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم علم تمثيل وسيطي له

تمرين

(D) مستقيم معرف بتمثيل وسيطي له و هو

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad \text{حيث } t \text{ عدد حقيقي}$$

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

اكتب جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D).

حل

نعين جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D) بالتعبير عن t بدلالة x, y, z في كل معادلة

من جملة التمثيل الوسيطي، و نجد $t = \frac{x+2}{3} = \frac{-y+1}{1} = \frac{z-3}{2}$

إذن $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2}$ هي جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D).

مسألة 1

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ حيث $\vec{i} = \vec{OI}$, $\vec{j} = \vec{OJ}$ و $\vec{k} = \vec{OK}$.
 $A(3; 0; 10)$, $B(0; 0; 15)$ و $C(0; 20; 0)$ نقط من الفضاء.
 (أ) 1. عين تمثيلا وسيطا للمستقيم (AB) .

2. اثبت أن (AB) يقطع محور الفواصل في نقطة E يطلب تحديد إحداثياتها.
 3. تحقق أن النقط A, B, C ليست على استقامة واحدة.

(ب) ليكن H المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC) .

1. اثبت أن المستقيم (BC) عمودي على المستوي (OEH) . استنتج أن $[EH]$ هو إرتفاع المثلث EBC .
2. عين معادلة ديكارتية للمستوي (OEH) .
3. عين تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC) ثم معادلة ديكارتية له.
4. عين تقاطع المستويات (OJK) و (OEH) و (ABC) .
5. احسب المسافة OH ثم استنتج المسافة EH .
6. تحقق أن نقطة تقاطع المستويات (OJK) و (OEH) و (ABC) هي النقطة H .
6. احسب المسافة بين النقطة O و المستوي (ABC) .

حل

(أ) 1. المستقيم (AB) يشمل النقطة A و يقبل \vec{AB} شعاعا توجيهيا له.

إذن يوجد عدد حقيقي k حيث $\vec{AM} = k \vec{AB}$ لدينا $\vec{AB}(-3; 0; -5)$ و $\vec{AM}(x-3; y; z-10)$
 $\vec{AM} = k \vec{AB}$ يكافئ $\begin{cases} x-3 = -3k \\ y-0 = 0k \\ z-10 = 5k \end{cases}$ الجملة $\begin{cases} x = 3 - 3k \\ y = 0 \\ z = 10 + 5k \end{cases}$ هي تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) .

2. (AB) يقطع محور الفواصل $(O; \vec{i})$ في نقطة E يعني $\begin{cases} x = 3 - 3k \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 3 - 3k \\ y = 0 \\ 10 + 5k = 0 \end{cases}$

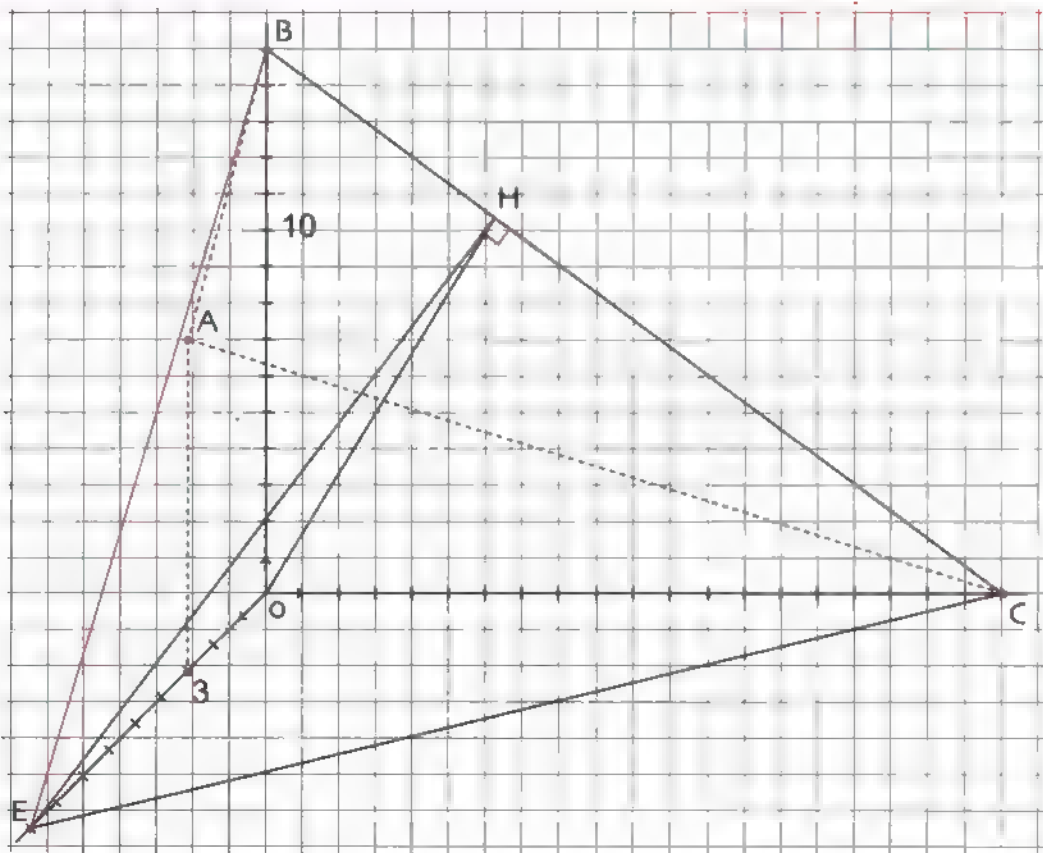
من أجل $k = -2$ نجد نقطة تقاطع (AB) و $(O; \vec{i})$ وهي $E(9; 0; 0)$.

3. النقط A, B, C ليست على استقامة واحدة لأنه لا يوجد عدد حقيقي λ يحقق $\vec{AC} = \lambda \vec{AB}$
 $\vec{AB}(-3; 0; 5)$ و $\vec{AC}(-3; 20; -10)$ و $-3 = 1 \times (-3)$ و $-10 \neq 1 \times 5$

(ب) 1. لإثبات أن (BC) عمودي على المستوي (OEH) يكفي البرهان أن (BC) عمودي على مستقيمين متقاطعين من المستوي (OEH) .

لدينا (OE) عمودي على المستوي (OBC) فهو عمودي على المستقيم (BC) (أو (BC) عمودي على (OE)). و لدينا (BC) عمودي على (OH) إذن (BC) عمودي على (OE) و (OH) فهو عمودي على المستوي (OEH) .

تمارين و حلول نموذجية



نستنتج أن (BC) عمودي على كل مستقيم من المستوي (OEH) فهو عمودي على (EH).
إذن [EH] هو ارتفاع المثلث EBC.

ملاحظة : يمكن أن نبرهن أن (BC) عمودي على (OE) بحساب الجداء السلمي للشعاعين $\vec{BC} \cdot \vec{OE} = 0(9) + 20(0) - 15(0) = 0$ وهو \vec{OE} و \vec{BC}

2. تعيين معادلة ديكارتية للمستوى (OEH).

بما أن $(OEH) \perp (BC)$ إذن \overline{BC} شعاع ناظمي للمستوي (OEH) . و بالتالي فللمستوي (OEH) معادلة من الشكل $0.x + 20y - 15z + d = 0$ حيث d عدد حقيقي. بما أن O نقطة من المستوي (OEH) إذن $4y - 3z = 0$ هي معادلة للمستوي (OEH) .

3. تعيين تمثيل وسيطي للمستوي (ABC).

المستوى (ABC) معرف بنقطة مثل B و شعاعين توجيحيان \vec{AB} و \vec{AC} .

لتكن نقطة $M(x; y; z)$ من المستوي (ABC) . إذن $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ حيث λ و μ عددا حقيقيين.

$$\begin{cases} x = -3\lambda - 3\mu \\ y = 20\mu \\ z = 15 + 5\lambda - 10\mu \end{cases} \quad \text{إذن الجعلة} \quad \begin{cases} x - 0 = -3\lambda - 3\mu \\ y - 0 = 0\lambda + 20\mu \\ z - 15 = 5\lambda - 10\mu \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \vec{BM} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC} \quad \text{لدينا}$$

هي تمثيل وسيطي للمستوي (ABC).

. كتابة معادلة ديكارتية للمستوي ABC :

$$\lambda = -\frac{x}{3} - \frac{y}{20} \text{ و } \mu = \frac{y}{20} \text{ فنجد } \begin{cases} -3\lambda - 3\mu = x \\ 20\mu = y \end{cases} \text{ نحل الجملة}$$

ثم نعوض λ و μ في المعادلة $5\lambda - 10\mu = z - 15$ فنجد المعادلة $20x + 9y + 12z - 180 = 0$

طريقة أخرى: يمكن تعيين معادلة للمستوي (ABC) بتحديد شعاع ناظمي للمستوي (ABC) (العمودي على \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC})، واعتبار نقطة منه مثل B.

4. لتعيين تقاطع المستويات (OJK) و (OEK) و (ABC)

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{36}{5} \\ z = \frac{48}{5} \end{cases} \text{ فنجد } \begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases} \text{ نحل الجملة}$$

إذن المستويات (OJK) و (OEK) و (ABC) تشترك في النقطة ذات الإحداثيات $(0; \frac{36}{5}; \frac{48}{5})$.

5. [OH] هو ارتفاع المثلث BOC القائم في O.

$$\text{إذن } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \text{ و بالتالي } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2} \text{ أي } OH^2 = 144$$

$$\text{ينتج أن } OH = 12 \text{ لأن } OH = OB \cos x : OH = OC \sin x \text{ و } \widehat{OCH} = \widehat{BOH} = \alpha$$

. حساب EH : المثلث EOH قائم في O. إذن $EH^2 = OE^2 + OH^2 = 225$ و بالتالي $EH = 15$

و نلاحظ أن $0^2 + \left(\frac{36}{5}\right)^2 + \left(\frac{48}{5}\right)^2 = 144$ و يساوي OH^2 . إذن نقطة تقاطع المستويات (OJK) و (OEK) و (ABC) هي النقطة H.

6. حساب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC)

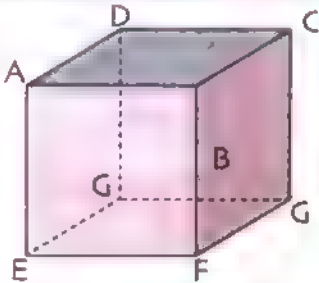
نستعمل الدستور الذي يعطي المسافة بين نقطة من الفضاء ومستوى معرف بمعادلة ديكارتية له.

فيكون من أجل المبدأ O والمستوي (ABC)

$$OO' = \frac{|20(0) + 9(0) + 12(0) - 180|}{\sqrt{20^2 + 9^2 + 12^2}} = \frac{180}{\sqrt{625}} = \frac{36}{5}$$

لنقطة O على المستوي (ABC).

مسألة 2



نعتبر المكعب ABCDEFGH حيث $AB = 1$ (الشكل)

1. احسب \overrightarrow{AG} , \overrightarrow{BD} و $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}$.

استنتج أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (BED).

2. نعتبر المعلم $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

عين إحداثيات النقط A, B, D, G, E.

اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستوي (BED). اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (BED).

اثبت أن (AG) عمودي على المستوي (BED).

تمارين و حلول نموذجية

حل

1. لدينا $\vec{AG} = \vec{AF} + \vec{FG}$ و بالتالي $\vec{AG} \cdot \vec{BE} = (\vec{AF} + \vec{FG}) \cdot \vec{BE}$

$$= \vec{AF} \cdot \vec{BE} + \vec{FG} \cdot \vec{BE} = 0 + 0$$

إذن $\vec{AG} \cdot \vec{BE} = 0$

((FG)) عمودي على المستوي (FBE) فهو عمودي على ((BE)). إذن (AG) و (BE) متعامدان.

لدينا أيضا $\vec{AG} = \vec{AC} + \vec{CG}$ و بالتالي $\vec{AG} \cdot \vec{BD} = (\vec{AC} + \vec{CG}) \cdot \vec{BD}$

$$= \vec{AC} \cdot \vec{BD} + \vec{CG} \cdot \vec{BD} = 0 + 0$$

إذن $\vec{AG} \cdot \vec{BD} = 0$

((CG)) عمودي على المستوي (CBD) فهو عمودي على ((BD)). إذن (AG) و (BD) متعامدان.

المستقيم (AG) عمودي على مستقيمين متقاطعين (BD) و (BE) من المستوي (BED).

إذن (AG) عمودي على المستوي (BED).

2. المعلم $(D; \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DH})$ متعامد و متجانس. إحداثيات النقط A, B, D, G و E

هي على الترتيب $(1; 0; 0)$, $(1; 1; 0)$, $(0; 0; 0)$, $(0; 1; 1)$ و $(1; 0; 1)$.

كتابة قشيل وسيطي للمستوي (BED).

المستوي (BED) يشمل المبدأ D و يقبل \vec{DB} و \vec{DE} شعاعين توجيهيين له و بالتالي يوجد عدنان

حقيقيان λ و μ حيث من أجل كل نقطة M من (BED) يكون $\vec{DM} = \lambda \vec{DB} + \mu \vec{DE}$.

لدينا $\vec{DM}(x; y; z)$, $\vec{DB}(1; 1; 0)$ و $\vec{DE}(1; 0; 1)$ إذن $\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ قشيل وسيطي للمستوي (BED).

كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (BED): بتعويض λ و μ على الترتيب بالعددین y و z

في المعادلة $x = \lambda + \mu$ نجد معادلة ديكارتية للمستوي (BED) و هي $x - y - z = 0$.

إحداثيات الشعاع \vec{AG} هي $(-1; 1; 1)$ و لدينا $(1; -1; -1)$ هي إحداثيات شعاع ناظمي \vec{n}

للمستوي (BED). الشعاعان \vec{AG} و \vec{n} متوازيان (لأن $\vec{AG} = -\vec{n}$)

إذن \vec{AG} عمودي على المستوي (BED).

ملاحظة: الشعاع $\vec{DA}(-1; 1; 1)$ ناظمي للمستوي (BED) الذي يشمل المبدأ D.

إذن $0 = 0 + 1 \times y + 1 \times z + (-1) \times x$ أي $x - y - z = 0$ هي معادلة للمستوي (BED).

تمارين و مسائل

7. ABCD مشور منظم حيث $AB = a$.

ا، ل و K منتصفات [BC]، [BD] و [AC]

على الترتيب

احسب $\vec{AD} \cdot \vec{JK}$; $\vec{AB} \cdot \vec{IK}$; $\vec{AD} \cdot \vec{AK}$; $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

المستقيم في الفضاء

فيما يلي الفضاء منسوب إلى معلم $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ و $(0; 1; 1)$.

8. 1. عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل

النقطة $A(1; 0; -1)$ و يقبل $\vec{u}(1; 1; 1)$ شعاع

توجيه له.

2. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل

النقطة $B(2; 1; -1)$ و يقبل $\vec{v}(1; 1; 0)$ شعاع

توجيه له.

3. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل

النقطة $C(-2; 1; 0)$ و يقبل \vec{k} شعاع توجيه له.

9. 1. عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) حيث

$A(2; 1; 3)$ و $B(-1; 3; 2)$ نقطتان من الفضاء.

2. هل يشمل (AB) النقطة $C(8; -3; 5)$ ؟

النقطة $D(4; -2; 1)$ ؟

10. نعتبر المستقيم (Δ) المعروف بالتمثيل الوسيطى

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases} \text{ حيث } t \text{ عدد حقيقي.}$$

1. عين من بين النقط

$A(2; 1; 0)$ ، $B(\frac{1}{2}; -1; -1)$ ، $C(-\frac{3}{2}; 2; 0)$

و $D(-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}; \frac{1}{2})$ التي تنتمي إلى (Δ) .

2. عين شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

3. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ') الذي يشمل

النقطة O و يوازي (Δ) .

4. اكتب جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (Δ') .

الجداء السلمي في المستوي

1. ABCD مربع مركزه O حيث $AB = a$

احسب $\vec{AO} \cdot \vec{OC}$ بدلالة a.

2. ABCD مربع حيث $AB = a$. ا منتصف

[AB] و ل منتصف [AD].

أثبت أن المستقيمين (DI) و (CJ) متعامدان :

• باختيار معلم متعامد و متجانس.

• بدون استعمال معلم.

الجداء السلمي في الفضاء

3. ABCDEFGH مكعب حيث $AB = a$

احسب الجداءات السلمية التالية :

$$\vec{AC} \cdot \vec{BF} ; \vec{BC} \cdot \vec{GH} ; \vec{AE} \cdot \vec{EH} ; \vec{DB} \cdot \vec{DC}$$

$$\vec{AF} \cdot \vec{AH} ; \vec{FC} \cdot \vec{FD} ; \vec{AC} \cdot \vec{EG}$$

4. باختيار معلم متعامد و متجانس

احسب الجداءات السلمية الواردة في التمرين ③

5. الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ و $(0; 1; 1)$. تعطى النقط: $A(\sqrt{2}; -1; 1)$ ،

$B(0; 0; 2)$ و $C(\sqrt{2}; 1; 1)$.

1. احسب $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ثم قيسا للزاوية \widehat{BAC} .

2. ماهي طبيعة المثلث ABC ؟

6. الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ و $(0; 1; 1)$. تعطى النقط $A(-2; 1; 4)$ ،

$B(-1; -2; 2)$ ، $C(4; -3; -1)$ و $H(0; -5; 0)$.

أثبت أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة C

على المستقيم (AB).

تمارين و مسائل

17 تعطى النقط $B(-1; 1; 2)$ ، $A(2; -1; 3)$ و $C(0; -1; 4)$.

1. اثبت أن النقط A ، B ، C تعرف مستويا.
 2. عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
- فيما يلي الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

18 اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1; -1; 2)$ و يقبل $\vec{u}(1; 1; 1)$ و $\vec{v}(1; 1; 1)$ شعاعي توجيه له.

19 نفس السؤال السابق من أجل المستوي الذي يشمل النقط $B(3; 4; -3)$ ، $A(-1; 2; 1)$ و $C(5; 3; 2)$.

20 المستوي المعروف بالتمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x = -2 + 3t - 2s \\ y = -t + 3s \\ z = -3 - 2t + s \end{cases} \text{ حيث } t \text{ و } s \text{ عددان حقيقيان.}$$

من بين النقط $B(3; -4; -6)$ ، $A(-2; -1; 1)$ ،

$C(-2; 0; -3)$ ، $D(1; -1; 1)$ عيّن التي تنتمي إلى المستوي (P) .

21 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس المستوي المعروف بالتمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x = -3 + 4t - 2s \\ y = 4 - 5t - s \\ z = 1 + t + 3s \end{cases} \text{ حيث } t \text{ و } s \text{ عددان حقيقيان.}$$

1. عيّن نقطة A من المستوي (P) و شعاعي توجيه له.
2. احسب إحداثيات شعاع ناظمي له.
3. اكتب معادلة ديكارتية له.

11 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس هل تعرف الجمل التالية نفس المستقيم ؟

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad ; \quad t \text{ عدد حقيقي.}$$

$$\begin{cases} 2x - y - 2z - 1 = 0 \\ x - 4y - z + 3 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x - 1 = z \\ y = 1 \end{cases}$$

برر إجابتك.

المستوي في الفضاء

فيما يلي، الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

12 عيّن شعاعا ناظميا لكل من المستويات التالية :

$$(P_1): 2x + \frac{1}{3}y - z = 0$$

$$(P_2): -5x - 2y + 3z - 1 = 0$$

$$(P_4): \frac{1}{2}y - z + 1 = 0 \quad ; \quad (P_3): 3x - 2y = 0$$

$$(P_6): 3z - 4 = 0 \quad ; \quad (P_5): x - \sqrt{2} = 0$$

13 النقطة $A(4; -1; 3)$ من الفضاء

و $\vec{u}(2; 1; -3)$ شعاع.

عيّن معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل A و يقبل \vec{u} شعاعا ناظميا له.

14 النقطة $A(3; 1; -1)$ و $x - 2y + z - 5 = 0$

معادلة لمستوي (P) . عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل A و يوازي (P) .

15 $A(2; \frac{1}{2}; 3)$ ، $B(-3; 4; -\frac{1}{2})$ نقطتان.

عيّن معادلة للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$ (الذي يشمل منتصف $[AB]$ و يقبل \vec{AB} شعاعا ناظميا له).

16 نعتبر المستوي (P) المعروف بالمعادلة

$$5x - y + z + 6 = 0 \text{ و النقطة } A(-5; 6; -2)$$

اثبت أن النقطة $B(0; 5; -1)$ هي المسقط

العمودي للنقطة A على (P) .

تمارين و مسائل

$$(D): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -4 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ و } (P): 2x - y + z + 5 = 0 \quad (1)$$

$$(D): \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -1 - t \\ z = 2 \end{cases} \text{ و } (P): x + 3y - z + 3 = 0 \quad (2)$$

$$(D): \begin{cases} x = 4 + t \\ y = t \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ و } (P): x + y - 2z + 2 = 0 \quad (3)$$

25 ادرس الوضع النسبي لكل من المستوي (P) والمستقيم (D)، وعين نقط التقاطع، إن وجدت في كل من الحالتين التالين :

$$(P): 2x - y + 3z = 0 \quad (1)$$

$$(D): x + 1 = y - 2 = \frac{z - 4}{2} \text{ و } (2)$$

$$(D): \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} \\ z = 2 \end{cases} \text{ و } (P): x + y - 2z - 1 = 0$$

الوضع النسبي لمستويين (أو ثلاث مستويات)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

26 ادرس فيما يلي الوضع النسبي لكل من المستويين (P)، (P') وعين مستقيم تقاطعهما عند

$$(P') - 2x + 4y - 2z + 2 = 0 \text{ و } (P) x - 2y + z - 1 = 0 \quad (1)$$

$$(P') 2x + 3y - z + 10 = 0 \text{ و } (P) 4x + 6y - 2z - 1 = 0 \quad (2)$$

$$(P') x - y + 2z + 2 = 0 \text{ و } (P) 3x - 2y - z - 9 = 0 \quad (3)$$

$$(P') 2x + y + 1 = 0 \text{ و } (P) -x + 2y + z + 8 = 0 \quad (4)$$

27 ادرس فيما يلي تقاطع المستويات (P)، (Q) و (R) حيث :

$$(Q) 2y - z + 3 = 0 \text{ و } (P) x + y + z - 2 = 0 \quad (1)$$

$$(R) x + y + z - 1 = 0$$

$$(Q) x - y + z + 4 = 0 \text{ و } (P) x + y + z - 2 = 0 \quad (2)$$

$$(R) x + \frac{4}{3}y + z - 3 = 0$$

الوضع النسبي لمستقيمين في الفضاء

22 الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

t و t' عددان حقيقيان :

ادرس فيما يلي الوضع النسبي لكل من المستقيمين (D) و (D').

$$(D'): \begin{cases} x = -6 + 5t' \\ y = -2 - t' \\ z = 4 - 4t' \end{cases} \text{ و } (D): \begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = -4 - t \\ z = -4 - 4t \end{cases} \quad (1)$$

$$(D'): \begin{cases} x = t' \\ y = 3 + t' \\ z = 8 + 3t' \end{cases} \text{ و } (D): \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 3t \end{cases} \quad (2)$$

$$(D'): \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = -1 - t' \\ z = 7 + 4t' \end{cases} \text{ و } (D): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (3)$$

$$(D'): \begin{cases} x = -2 + t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 2 + 3t' \end{cases} \text{ و } (D): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 7 + 3t \end{cases} \quad (4)$$

23 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

1. اثبت أن المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين التالين :

$$\begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 1 + 3t' \\ z = 6 - t' \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -2 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$$

حيث $t \in \mathbb{R}$ ، $t' \in \mathbb{R}$ ، متقاطعان.

2. عين معادلة ديكرتية للمستوي الذي يشمل المستقيمين (Δ) و (Δ') .

الوضع النسبي لمستقيم ومستوي

فيما يلي الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

24 t عدد حقيقي. ادرس الوضع النسبي لكل من

المستوي (P) والمستقيم (D)، وعين نقط التقاطع، إن وجدت، في كل حالة من الحالات التالية :

تمارين و مسائل

(3) $(P) x+y+z-1=0$ و $(Q) \frac{x}{3}+y-z=0$

(R) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}-\frac{z}{6}-\frac{1}{6}=0$

28 حل الجمل التالية ثم فسر بيانها النتيجة.

$$\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x+2y-4z=-5 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x+2y-4z=-5 \\ x+y-3z=1 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x+2y-4z=-5 \\ 4x+y+3z=15 \end{cases} \quad (3)$$

مجموعات نقط من الفضاء

29 A, B و C نقط من الفضاء مع $BC=4$.

1. عيّن مجموعة النقط M من الفضاء.

بحيث $\vec{BC} \cdot \vec{AM} = 12$

2. نفس السؤال من أجل $\vec{BC} \cdot \vec{AM} = -10$.

30 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نفرض النقطة $A(1; -2; 3)$ و الشعاع $\vec{n}(2; -1; 4)$

عيّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث يكون

$\vec{AM} \cdot \vec{n} = -4$

31 A و B نقطتان من الفضاء بحيث $AB=10$.

1. عيّن النقطة G مرجع النقطتين A و B المرفقتين

بالمعاملين 2 و 3 على الترتيب. أنشئ G.

2. عيّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث

$2MA^2 + 3MB^2 = 200$

هل تنتمي النقطة A إلى هذه المجموعة ؟

هل تنتمي النقطة B إليها ؟

32 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. A(1; 2; 3) و B(3; 4; 2) نقطتان.

عيّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث :

$2MA^2 - 3MB^2 = -10$

33 A و B نقطتان من الفضاء بحيث $AB=5$.

عيّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث :

$MA^2 - MB^2 = 30$

34 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. A(2; -1; 3) و B(2; 3; 1) نقطتان.

عيّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث :

$MA^2 - MB^2 = -10$

مسائل

35 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. تعطي النقط $A(1; 2; 0)$.

B(-2; 1; 1), C(-3; 5; -1) و D(-4; 2; 4).

1. اثبت أن النقط B, C و D تعيّن مستويًا (P).

عيّن معادلة ديكارتية له.

2. عيّن إحداثيات المسقط العمودي H للنقطة A

على (P).

3. عيّن معادلة للمستوي (R) الذي يشمل H

و يقبل \vec{BC} شعاعًا ناظميًا له.

تحقق أن (P) و (R) متعامدان.

4. (P) و (R) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ).

إعط قشيلًا و سبطيًا له.

5. احسب المسافة بين المبدأ O و المستقيم (Δ).

36 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. لتكن النقطتان $A(-2; -\frac{1}{2}; -2)$

و B(3; 3; -3).

تمارين و مسائل

- أ) تحقق من وجود النقطة G من أجل كل عدد حقيقي موجب t .
- ب) ليكن I مرجع النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 1 و 2 على الترتيب.
- عيّن إحداثيات النقطة I .
- عبّر عن \overrightarrow{IG} بدلالة \overrightarrow{IC} و t .
- ج) بيّن أن مجموعة النقط G عندما يسمح t المجموعة R ، هي القطعة $[IC]$ باستثناء C .
- ما هي قيمة t التي من أجلها، يكون منتصف القطعة $[IC]$ منطبقا على G ؟

1. اكتب معادلة للكرة (S) ذات المركز A و التي تشمل B .
2. عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P) المماس للكرة (S) . في النقطة B .
3. لتكن النقط $D(-2; -2; -5)$ ؛ $C(-3; 0; -3)$ ؛ $E(-1; 0; -5)$.
- تحقق أن النقط C ، D و E تعيّن مستويا (Q) يطلب إيجاد تمثيل وسيطي له.
4. بيّن أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.
5. حدّد الوضع النسبي للمستوي (Q) و الكرة (S) .
- عيّن طبيعة مجموعة تقاطعهما.

37 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقط $A(0; -1; 1)$ ؛ $B(0; 0; 3)$ ؛ $C(-2; 0; 0)$.

1. اثبت أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.
2. ليكن الشعاع $\vec{n}(-3; -4; 2)$.
- تحقق أن \vec{n} عمودي على كل من الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} .
- استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
3. (P) و (Q) مستويان معادلتهما على الترتيب :
- $$2x + y + 2z + 1 = 0 \quad \text{و} \quad x - 2y + 6z = 0$$
- اثبت أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (D) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.
4. ادرس الوضع النسبي للمستقيم (D) و المستوي (ABC) .

5. ليكن t عددا حقيقيا موجبا.

نعتبر المرجع G للنقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات 2 ؛ 1 ؛ t على الترتيب.

حلول التمارين و المسائل

الهندسة في الفضاء

1 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 = \frac{a^2}{2}$

2 $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$ • معلم متعامد و متجانس
لدينا $D(0; a), C(a; a), J(0; \frac{a}{2}), I(\frac{a}{2}; 0)$
 $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{CJ} = 0$ إذن (DI) و (CJ) متعامدان.
• بدون اختيار معلم

$\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{CJ} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ})$
 $= \frac{1}{2} \overrightarrow{DA}^2 - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 = 0$
إذن $(DI), (CJ)$ متعامدان.

3 لدينا $AB = a$
 $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC}^2 = a^2$
 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EH} = 0$
 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{GH} = 0$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BF} = 0$
 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}^2 = 2a^2$

$\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{FD} = (\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC})(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GD}) = 2a^2$

$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AH} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF})(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}) = a^2$

4 ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد و المتجانس
 $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ (كما في الشكل السابق)

لدينا $C(a; a; 0), B(a; 0; 0), A(0; 0; 0)$

$F(a; 0; a), E(0; 0; a), D(0; a; 0)$

$H(0; a; a), G(a; a; a)$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{GH} = 0 ; \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EH} = 0 ; \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = a^2$
 $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{FD} = 2a^2 ; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EG} = 2a^2 ; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$
 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AH} = a^2$

5 $\overrightarrow{AC}(0; 2; 0), \overrightarrow{AB}(-\sqrt{2}; 1; 1)$ • 1

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos(\widehat{BAC})$

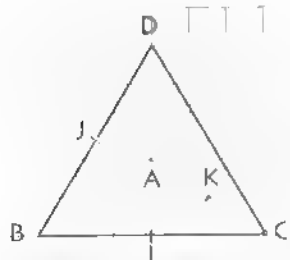
و $AC = 2, AB = 2$

إذن $2 = 4 \cos(\widehat{BAC})$ و بالتالي $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.
2. المثلث متساوي الأضلاع.

6 لدينا $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AB}$ إذن $H \in (AB)$

هو شعاع توجيه للمستقيم (AB) و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$
 $((AB) \perp (CH))$ إذن H هي المسقط العمودي
للنقطة C على (AB) .

7 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$



$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AK}^2 = \frac{a^2}{4}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IK} = \frac{\overrightarrow{AB}^2}{2} = \frac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AK} = -a^2$

8 $(\lambda \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$ • 1

$(\eta \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = \eta \end{cases}$ (3 $(\mu \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = -1 \end{cases}$ • 2

9 $(\lambda \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$ • 1

2. من أجل $(x; y; z) = (8; -3; 5)$

يكون $\lambda = -2$ إذن $C(8; -3; 5)$ تنتمي إلى (AB) .

10 1. $D \in (\Delta), C \in (\Delta), B \in (\Delta), A \notin (\Delta)$

2. الشعاع $\vec{u}(-2; 3; 1)$ هو شعاع توجيه
للمستقيم (Δ)

3. الجملة $\begin{cases} x = -2\eta \\ y = 3\eta \\ z = \eta \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ')

4. المعادلتان $\frac{x}{-2} = \frac{y}{3} = z$ هما جملة معادلتين
ديكارتيتين للمستقيم (Δ') .

حلول التمارين و المسائل

$$18 \quad \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = -1 + \lambda + \mu \\ z = 2 + \lambda + \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu \text{ عدنان حقيقيان})$$

هي تمثيل وسيطي للمستوي (P)

$$19 \quad \begin{cases} x = -1 + 4\lambda + 6\mu \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 - 4\lambda + \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu \text{ عدنان حقيقيان})$$

هي تمثيل وسيطي للمستوي (P)

$$20 \quad D \in (P), C \in (P), B \in (P), A \in (P)$$

$$21 \quad 1. \vec{v}(-1; -1; 3), \vec{u}(4; -5; 1), A(-3; 4; 1)$$

$$2. \vec{n} \text{ شعاع ناظمي للمستوي } (P) \text{ يعني } \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\text{و } \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \text{ ونجد } \vec{n}(1; 1; 1)$$

$$3. x + y + z - 2 = 0 \text{ معادلة ديكرتية للمستوي } (P)$$

$$22 \quad 1. (D), (D') \text{ لهما شعاعا توجيه متساويان}$$

$$\text{و يشتركان في نقطة (مثل } A(-6; -2; 4) \text{)}$$

$$\text{إذن } (D), (D') \text{ متطابقان}$$

$$2. (D), (D') \text{ لهما شعاعا توجيه متساويان}$$

$$\text{ولا يشتركان في أية نقطة إذن } D, D' \text{ متوازيان}$$

$$3. (D), (D') \text{ لهما شعاعا توجيه غير متوازيين إذن}$$

$$(D), (D') \text{ إما متقاطعان أو غير مستويين (ليسا من}$$

$$\text{نفس المستوي).}$$

$$\text{بحل الجملة } \begin{cases} -1 + 2t = 2 + t' \\ 1 - t = -1 - t' \end{cases} \text{ نجد } \begin{cases} t = 1 \\ t' = -1 \end{cases}$$

$$\text{من أجل } t = 1 \text{ نجد النقطة من } (D)$$

$$\text{ذات الاحداثيات } (1; 0; 3)$$

$$\text{من أجل } t' = -1 \text{ نجد النقطة من } (D') \text{ ذات الاحداثيات}$$

$$(1; 0; 3) \text{ إذن يشتركان في النقطة } A(1; 0; 3)$$

$$4. \text{ شعاعا توجيه } (D), (D') \text{ غير متوازيين}$$

$$\text{إذن } (D), (D') \text{ متقاطعان أو غير مستويين}$$

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} -1 + t = -2 + t' \\ 2 + t = 4 + 2t' \end{cases} \text{ نجد } \begin{cases} t = -4 \\ t' = -3 \end{cases}$$

$$\text{من أجل } t = -4 \text{ نجد النقطة من } (D)$$

$$11 \quad \text{الجملة الثلاث متكافئة (لها نفس الحلول) إذن}$$

$$\text{فهي تعرف نفس المستقيم (الذي يشمل } A(1; 1; 0) \text{)}$$

$$\text{و } \vec{u}(1; 0; 1) \text{ شعاع توجيه له.}$$

$$12 \quad \vec{n}_3(3; -2; 0), \vec{n}_2(-5; -2; 3), \vec{n}_1(2; \frac{1}{3}; 0)$$

$$\vec{n}_6(0; 0; 3), \vec{n}_5(1; 0; 0), \vec{n}_4(0; \frac{1}{2}; -1)$$

$$\text{اشعة ناظمية للمستويات } (P_1), (P_2), (P_3), (P_4),$$

$$(P_5), (P_6) \text{ بهذا الترتيب}$$

$$13 \quad \vec{u}(2; 1; -3) \text{ شعاع ناظمي للمستوي } (P) \text{ حيث}$$

$$A(4; -1; 3) \text{ و يشمل } (P): 2x + y - 3z + d = 0$$

$$\text{إذن } (P): 2x + y - 3z + 2 = 0$$

$$14 \quad (Q) // (P) \text{ يعني أن } \vec{n}(1; -2; 1) \text{ شعاع ناظمي}$$

$$\text{للمستوي } (Q) \text{ الذي يشمل } A \text{ إذن } x - 2y + z = 0$$

$$(Q) \text{ المستوي المحوري } (P) \text{ للقطعة } [AB] \text{ يشمل}$$

$$\text{منتصفها } (\frac{-1}{2}; \frac{9}{4}; \frac{5}{4}) \text{ و يقبل شعاعا ناظمية له}$$

$$\vec{AB}(-5; -\frac{7}{2}; \frac{7}{2}) \text{ إذن } -5x + \frac{7}{2}y - \frac{7}{2}z - 6 = 0$$

$$(P): -5x + \frac{7}{2}y - \frac{7}{2}z - 6 = 0$$

$$16 \quad AB = 3\sqrt{3}, B \in (P) \text{ و المسافة بين } A \text{ و } (P)$$

$$\text{هي } \frac{27}{3\sqrt{3}} \text{ أي } 3\sqrt{3} \text{ إذن } B \text{ هي المسقط العمودي}$$

$$\text{لنقطة } A \text{ على } (P)$$

$$17 \quad 1. \text{ النقط } A, B, C \text{ ليست على استقامة}$$

$$\text{واحدة إذن تعرف مستويا.}$$

$$2. ax + by + cz + d = 0 \text{ معادلة ديكرتية لمستوي } (P)$$

$$\begin{cases} 2a - b + 3c + d = 0 \\ -a + b + 2c + d = 0 \\ -b + 4b + d = 0 \end{cases}$$

$$\text{يعني } (P) \text{ نقط } A, B, C$$

$$\text{بحل الجملة ذات المجاهيل } a, b, c \text{ و اختيار } d$$

$$(مثلا d = -11) \text{ نجد } 2x + 5y + 4z - 11 = 0$$

$$\text{و هي معادلة للمستوي } (ABC)$$

حلول التمارين و المسائل

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0, \vec{u}(3; -1; 0), \vec{n}(1; 3; -1) \cdot 2$$

النقطة من $A(-2; -1; 2)$ من (D) لا تنتمي إلى (P) إذن (P) ، (D) متوازيان.

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0, \vec{u}(1; 1; 1), \vec{n}(1; 1; -2) \cdot 3$$

النقطة من $A(4; 0; 3)$ من (D) تنتمي إلى (P) إذن $(D) \subset (P)$.

25 1. (D) ، (P) متقاطعان في النقطة ذات

$$\text{لإحداثيات } \left(-\frac{15}{7}; \frac{6}{7}; \frac{12}{7}\right).$$

2. (D) ، (P) متقاطعان في النقطة ذات الإحداثيات $(10; -5; 2)$

26 1. (P) ، (P') منطبقان عن بعضهما

(متوازيان و يشتركان في نقطة).

2. (P) ، (P') متوازيان (تماما).

3. (P) ، (P') متقاطعان في مستقيم.

تعيين مستقيم التقاطع يكون بحل الجملة

$$\begin{cases} 3x - 2y - z - 9 = 0 \\ x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \text{ واعتبار أحد المجاهيل}$$

(مثلا $z = t$) وسيطا. ونجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم

$$(t \in \mathbb{R}), \begin{cases} x = 5t + 13 \\ y = 7t + 15 \\ z = t \end{cases} \text{ المشترك بين } (P), (P')$$

4. (P) ، (P') متقاطعان في مستقيم معرف بتمثيل

$$(t \in \mathbb{R}), \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \\ z = 5t - 6 \end{cases} \text{ وسيطي له}$$

27 1. (P) ، (R) متوازيان إذن

$$(P) \cap (Q) \cap (R) = (\emptyset)$$

2. (P) ، (Q) يشتركان في المستقيم (Δ) المعروف

$$(t \in \mathbb{R}), \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \text{ يتمثل وسيطي}$$

ذات الإحداثيات $(-5; -2; -5)$.

من أجل $t' = -3$ نجد النقطة من (D') ذات الإحداثيات $(-5; -2; -7)$.

إذن (D) ، (D') لا يشتركان في أية نقطة ومنه (D) ، (D') غير مستويين (لا يشملها مستو).

23 1. شعاعا توجيه (Δ) ، (Δ') غير متوازيين

فهما متقاطعان أو غير مستويين.

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} 3 + 5t = 2 + t' \\ 7 + 4t = 6 - t' \end{cases} \text{ نجد } \begin{cases} t = 0 \\ t' = -1 \end{cases}$$

$t = 0$ نجد $A(3; -2; 7)$ من (Δ)

$t' = -1$ نجد نفس النقطة A من (Δ')

إذن (Δ) ، (Δ') يشتركان في النقطة A

2. الشعاع الناظمي $\vec{n}(\alpha; \beta; 8)$ للمستوي (P)

الذي يشمل (Δ) ، (Δ') عمودي على الشعاعين

$$\vec{v}(-1; 3; -1), \vec{u}(5; -1; 4) \text{ التوجيهيين}$$

$$\text{إذن } \begin{cases} 5\alpha - \beta + 4\delta = 0 \\ -\alpha + 3\beta - \delta = 0 \end{cases} \text{ حيث } \delta \text{ وسيط حقيقي.}$$

$$\text{نجد } (\alpha; \beta; \delta) = \left(-\frac{11}{14}; \frac{8}{14}; \delta\right) \text{ حيث } \delta \neq 0.$$

و من أجل $\delta = 14$: $(\alpha; \beta; \delta) = (-11; 1; 14)$

النقطة ذات الإحداثيات $(2; 1; 6)$ تنتمي إلى (P)

$$\text{إذن } 11x - y - 14z + 63 = 0 \text{ معادلة ديكارتية}$$

للمستوي (P) .

24 1. $\vec{n}(2; -1; 1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

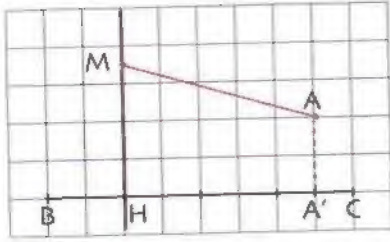
$$\vec{u}(1; -3; 1) \text{ شعاع توجيه للمستقيم } (D)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0 \text{ إذن } (P), (D) \text{ متقاطعان في نقطة}$$

$$\text{إحداثياتها } \left(-\frac{4}{3}; 3; \frac{2}{3}\right) \text{ (من أجل } t = -\frac{7}{3} \text{)}$$

حلول التمارين و المسائل

في اتجاهين متعاكسين. $\overrightarrow{A'H} = -\frac{5}{2}$.



مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = -10$ هو المستوي الذي يشمل H' و يقبل \overrightarrow{BC} شعاعا ناظميا.

30 $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = -4$ يعني $2x - y + 4z - 16 = 0$

مجموعة النقط M هي مستو معرف بالمعادلة السابقة.

31 مجموعة النقط M من الفضاء حيث

$2MA^2 + 3MB^2 = 200$ هي كرة S مركزها النقطة

G مرجع النقطتين $A(2)$, $B(3)$ و نصف قطرها 4

$A \in S, B \in S, G \in S$

32 مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء

حيث $2MA^2 - 3MB^2 = -10$ هي الكرة ذات المعادلة

$\omega(7; 8; 0)$ ، مركزها $(x-7)^2 + (y-8)^2 + z^2 = 64$

و نصف قطرها 8.

33 مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء

حيث $MA^2 - MB^2 = 30$

هي المستوي العمودي

على النقطة (AB) في النقطة

H ، المسقط العمودي

للقطة M على (AB) ، حيث $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IH} = 15$ أو $\overrightarrow{IH} = 3$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IH})$ لهما نفس الاتجاه I منتصف $[AB]$

34 مجموعة النقط $M(x; y; z)$ حيث

$MA^2 - MB^2 = -10$ هو المستوي المعروف بالمعادلة

الديكارتية $4y - 2z + 5 = 0$

شعاع توجيهه $\vec{u}(-1; 0; 1)$ عمودي على الشعاع

الناظمي $\vec{n}(1; \frac{4}{3}; 1)$ للمستوي (R)

إذن $(P) \cap (Q) \cap (R) = (\emptyset)$.

3. (P) ، (Q) يشتركان في المستقيم (Δ) المعروف

بتمثيل وسيطي $(t \in \mathbb{R})$ ، $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{2}{3}t + \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{3}t + \frac{1}{2} \end{cases}$

شعاع توجيهه $\vec{u}(1; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3})$ غير عمودي على (R)

(Δ) و (R) يتقاطعان في النقطة $A(0; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$

إذن $(P) \cap (Q) \cap (R) = \{A\}$.

28 $(x; y; z) = (1; 2; 3)$ 1

المستويات الثلاث تتقاطع في النقطة $A(1; 2; 3)$

2. الجملة ليس لها حل. المستويات الثلاثة لا تشترك

في أية نقطة.

3. الجملة لها ما لا نهاية من الحلول المستويات

الثلاثة تشترك في مستقيم معرف بتمثيل

وسيطي $(t \in \mathbb{R})$ ، $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{5}{2}t + \frac{9}{2} \\ z = -\frac{1}{2}t + \frac{7}{2} \end{cases}$

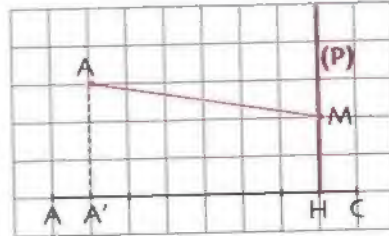
29 نفرض أن الاتجاه الموجب هو اتجاه \overrightarrow{BC}

1. نسمي H ، A' المسقطين العموديين على

(BC) لكل من

النقطتين M ، A

بهذا الترتيب



لدينا $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{A'H} = 12$

\overrightarrow{BC} ، $\overrightarrow{A'H}$ لهما نفس الاتجاه إذن $\overrightarrow{A'H} = 3$ ، إذن

مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = 12$

هي المستوى الذي يشمل H و يقبل \overrightarrow{BC} شعاعا ناظميا.

2. $\overrightarrow{A'H} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = -10$ مع $\overrightarrow{A'H}$ ، \overrightarrow{BC}

حلول التمارين و المسائل

35 . 1 . B , C , D ليست على استقامة واحدة ،

إذن تعيين مستويا (P) معادلته الديكارتية

$$2x + y + z + 2 = 0 \text{ هي}$$

$$A(1; 2; 0) \text{ لا تنتمي إلى (P)}$$

نضع $H(x_0; y_0; z_0)$ لدينا \overrightarrow{AH} يوازي \vec{n}

(\vec{n} الشعاع الناظمي للمستوي (P)) .

$$H \in (P) \text{ حيث } t \text{ وسيط حقيقي مع } \begin{cases} x_0 = 2t + 1 \\ y_0 = t + 2 \\ z_0 = t \end{cases} \text{ إذن}$$

$$\text{إذن } H(-1; 1; -1)$$

$$3 . x - 4y + 2z + 7 = 0 \text{ معادلة ديكارتية للمستوي}$$

(R) الذي يشمل H و يقبل \overrightarrow{BC} شعاعا ناظيا .

الشعاعان الناظميان $\vec{n}(2; 1; 1)$ ، $\vec{n'}(1; -4; 2)$

متعامدان إذا (P) ، (R) متعامدان .

$$4 . \text{ نحل الجملة } \begin{cases} 2x + y + z + 2 = 0 \\ x - 4y + 2z + 7 = 0 \end{cases}$$

مع اعتبار احد المجاهيل (مثلا z) وسيطا فنجد التمثيل

$$t \in \mathbb{R} , \begin{cases} x = -\frac{2}{3}t - \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{3}t + \frac{4}{3} \\ z = t \end{cases} \text{ الوسيط للمستقيم } (\Delta) :$$

5 . لدينا O' , K , L مساقط O على (P) ، (R) ،

$$\text{على الترتيب . نجد } OO' = \sqrt{3}$$

36 . 1 . معادلة الكرة $S(A; AB)$

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 36$$

2 . $\overrightarrow{AB}(4; 4; -2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

و الذي يشمل B . $2x + 2y - z - 15 = 0$: (P)

3 . النقط C , D , E ليست على استقامة واحدة ، إذن

$$\begin{cases} x = -3 + \lambda + 2\mu \\ y = -2\lambda \\ z = -3 - 2\lambda - 2\mu \end{cases} \text{ تعين مستويا (Q) حيث الجملة}$$

هي تمثيل وسيطي له .

$$4 . \vec{n}(2; -1; 2) \text{ شعاع ناظمي للمستوي (Q) .}$$

\vec{n} ، \overrightarrow{AB} متعامدان إذن (P) ، (Q) متعامدان .

$$5 . 2x - y + 2z + 12 = 0 \text{ معادلة ديكارتية}$$

للمستوي (Q) ، $AB = 6$ ، $d(A; Q) = 3$.

$d(A; Q)$ هي المسافة بين A مركز الكرة S و المستوي

$$(Q) . \text{ لدينا } d(A; Q) < AB$$

إذن (Q) يقطع S في دائرة نصف قطرها r

$$\text{حيث } r = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3} \text{ و مركزها } A' \text{ المسقط}$$

العمودي للنقطة A على (Q) حيث \vec{n}

$$\text{و } A' \in (Q) \text{ و } \overrightarrow{AA'}(x_0 + 1; y_0 + 1; z_0 + 1)$$

$$\text{إذن } A'(-3; 0; -3)$$

37 . 1 . الشعاعان $\overrightarrow{AB}(0; 1; 2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2; 1; -1)$

غير متوازيين إذن A , B , C ليست على استقامة واحدة .

$$2 . \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ و } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \text{ إذن } \vec{n} \text{ عمودي}$$

$$\text{على } \overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{AC} . -3x - 4y + 2z - 6 = 0 : (ABC)$$

$$3 . \vec{n}_1(2; 1; 2) \text{ شعاع ناظمي لـ (P) .}$$

$$\vec{n}_2(1; -2; 6) \text{ شعاع ناظمي لـ (Q) .}$$

\vec{n}_1 و \vec{n}_2 غير متوازيين إذن (P) و (Q) متقاطعان .

$$\begin{cases} x = -2 + \frac{2}{5}t \\ y = -2t - \frac{1}{5} \\ z = t \end{cases} \text{ وفق مستقيم ، تمثيله الوسيط}$$

$$4 . \text{ نجد } t = \frac{1}{4}$$

نقطة تقاطع (D) و (ABC) هي $E(-\frac{9}{10}; -\frac{7}{10}; \frac{1}{4})$

$$5 . \text{ (أ) من أجل كل عدد حقيقي موجب } t , t + 2 + 1 \neq 0$$

إذن المرجح G موجود .

$$\text{ب) } \vec{IG} = \frac{t}{3+t} \vec{IC} , \text{ (} 0; -\frac{1}{3}; \frac{7}{3} \text{)}$$

$$\text{ج) من أجل كل عدد موجب } t : 0 \leq \frac{t}{3+t} < 1$$

إذن G تنتمي إلى القطعة [IC] باستثناء النقطة C .

$$\text{لدينا } \frac{t}{3+t} = \frac{1}{2} \text{ إذن } t = 3$$

من أجل $t = 3$ ، G هي منتصف [IC] .

كتاب الرياضيات من سلسلة مدرستي موجه إلى تلاميذ السنة الثالثة من التعليم الثانوي، شعبة العلوم التجريبية. فهو يتماشى مع المنهاج الرسمي المقرر تطبيقه ابتداء من سبتمبر 2007 و يتكفل بالكفاءات القاعدية و الكفاءات الرياضية المصرح بها.

يتضمن كل باب من هذا الكتاب العناصر التالية :

- المعارف الأساسية الواردة في المنهاج.
 - الطرائق التي ينبغي التحكم فيها.
 - تمارين ومسائل مرفقة بحلول مفصلة.
 - تمارين ومسائل مقترحة للحل، توجد حلولها في الصفحات الأخيرة للكتاب.
- يشمل هذا الجزء أكثر من 220 تمريناً ومسألة محلولة.

كما نلفت الانتباه إلى وجود أكثر من 460 تمريناً ومسألة محلولة في الجزأين من الكتاب، تساعد المترشح لامتحان البكالوريا على التحضير الجيد.

